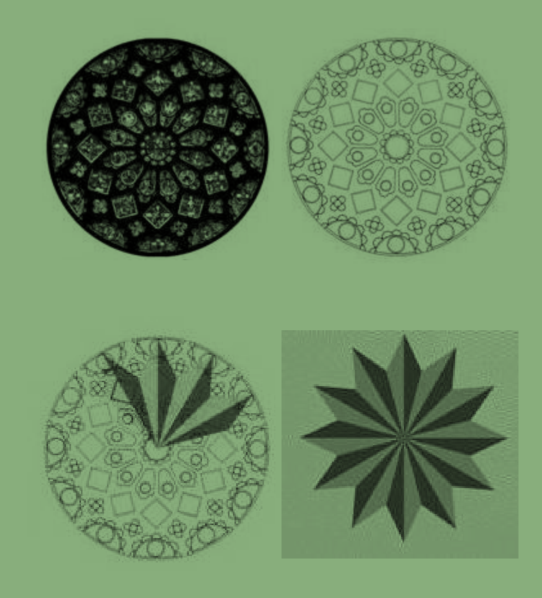
PROBLEMAS RESUELTOS DE APLICACIONES AFINES (I)

# TRANSFORMACIONES AFINES EN EL PLANO

*por*

ASCENSIÓN MORATALLA DE LA HOZ



CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
*ARQUITECTURA*
*DE MADRID*

3-18-04

PROBLEMAS RESUELTOS DE
APLICACIONES AFINES (I)

# TRANSFORMACIONES AFINES EN EL PLANO

*por*

ASCENSIÓN MORATALLA DE LA HOZ

**CUADERNOS**
**DEL INSTITUTO**
**JUAN DE HERRERA**
**DE LA *ESCUELA DE***
***ARQUITECTURA***
***DE MADRID***

**3-18-04**

C U A D E R N O S
D E L   I N S T I T U T O
J U A N   D E   H E R R E R A

**NUMERACIÓN**

2 Área
51 Autor
09 Ordinal de cuaderno (del autor)

**TEMAS**

1 ESTRUCTURAS
2 CONSTRUCCIÓN
3 FÍSICA Y MATEMÁTICAS
4 TEORÍA
5 GEOMETRÍA Y DIBUJO
6 PROYECTOS
7 URBANISMO
8 RESTAURACIÓN
0 VARIOS

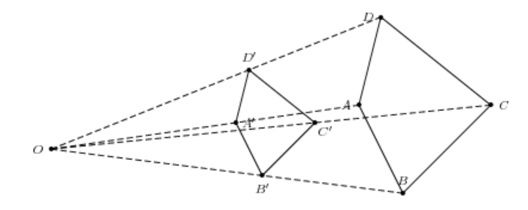
La imagen de la portada pertenece a Ismael Carpio, alumno de la ETSAM.

***Problemas resueltos de aplicaciones afines (I).***
***Transformaciones afines en el plano.***

Instituto Juan de Herrera.
Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid.
Gestión y portada: Almudena Gil Sancho.
CUADERNO 387.01 / 3-18-04
ISBN-13 (obra completa): 978-84-9728-441-7
ISBN-13: 978-84-9728-434-9
Depósito Legal: M-35428-2012

**INTRODUCCIÓN**

Antes de comenzar con la resolución de problemas recordemos qué es una aplicación afín. Nos centraremos en aplicaciones afines $f: R^2 \to R^2$ **biyectivas** que llamaremos transformaciones afines. La importancia de este tipo de aplicaciones radica en que permite definir figuras afinmente equivalentes, que tan menudo se usan en representación gráfica.
Cuando se dibuja un objeto en distintas escalas se está utilizando una transformación afín. Seguramente el lector puede nombrar la aplicación que produce el siguiente efecto sobre el polígono ABCD




Efectivamente es una homotecia de centro O. Las dos figuras son equivalentes porque existe una transformación afín, en este caso una homotecia, que transforma una en otra. Observar que la figura de vértices ABCD se transforma en A'B'C'D' mediante una homotecia *h* de centro O pero también existe otra homotecia, *h'*, en este caso de centro O, que transforma A'B'C'D' en ABCD. Estas dos homotecias están relacionadas: una es la inversa de la otra, es decir $h \circ h' = h' \circ h = id$ .

A lo largo de este libro se hará un tratamiento tanto geométrico como algebraico de las transformaciones en estudio.

Si quisiéramos hallar la ecuación de una transformación afín ¿qué elementos tendríamos que conocer?
Dado que estamos estudiando aplicaciones afines en el plano bastaría conocer el comportamiento de tres puntos no alineados del plano, es decir, dados los puntos A, B y C del plano bastaría conocer sus imágenes A', B' y C' para determinar la ecuación de la aplicación afín. Conocer las imágenes de tres puntos no alineados nos proporciona información sobre las imágenes de dos vectores linealmente independientes de $R^2$ y así sabemos cómo se transforman los vectores de una base de $R^2$ y por tanto determinar la aplicación lineal asociada.
Recordemos que una aplicación afín respecto de una referencia $R = \left(O, B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}\right)$ , se puede expresar con la siguiente ecuación

$$f(X) = b + \widehat{f}(X)$$
$$f(X) = b + NX \quad \text{ó}$$
$$X' = b + NX$$

siendo $N$ la matriz de la aplicación lineal asociada $\widehat{f}$ respecto de la base $B$ y $b$ la imagen del origen de la referencia.
O bien con la expresión matricial

$$\begin{pmatrix} X' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N & b \\ \vec{0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix}$$

Con este enfoque, podríamos plantear el problema de transformar A, B y C en A', B' y C' respectivamente, con las siguientes ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} A' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N & b \\ \vec{0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} B' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N & b \\ \vec{0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} C' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N & b \\ \vec{0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ 1 \end{pmatrix}$$

Escribiendo en una sola ecuación estas expresiones nos queda

$$\begin{pmatrix} A' & B' & C' \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N & b \\ \vec{0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B & C \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Despejando

$$\begin{pmatrix} N & b \\ \vec{0} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A' & B' & C' \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B & C \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

En esta expresión queda patente que para determinar la ecuación de la aplicación bastará conocer los transformados de tres puntos no alineados. No olvidar que N es una matriz 2x2.

Las transformaciones biyectivas se reconocen porque el determinante de la matriz de la aplicación lineal asociada es distinto de cero, ya que dicha aplicación lineal es biyectiva.

## 1. TRASLACIONES

A partir de ahora consideraremos las traslaciones del plano respecto de la referencia $R = (O, \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\})$

**P1.1** Sea *t* una traslación de vector $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$. Determina las ecuaciones de *t*.

**Solución**

Geométricamente la traslación mueve el punto *X* a *X'* de manera que *XX'* es el vector $\vec{v}$

$$XX' = \vec{v} \Rightarrow X' - X = \vec{v} \Rightarrow X' = X + \vec{v}$$

Considerando la aplicación identidad $i(X) = IX$, podemos reescribir la ecuación como

$$t(X) = \vec{v} + IX$$

$$t(X) = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X$$

Tomando $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad t(X) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ tenemos

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} y_1 = -2 + x_1 \\ y_2 = 5 + x_2 \end{cases}$$

Estas son distintas formas de expresar la traslación.

Recordamos algunas de las propiedades de las traslaciones en el siguiente problema

**P1.2** Dada la traslación de ecuación $t(X) = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X$, se pide las rectas invariantes.

**Solución**

Las traslaciones de vector $\vec{v} \neq (0,0)$ son transformaciones que no dejan fijo ningún punto. Por tanto *t* no tiene puntos fijos.

En el caso de una traslación con vector de traslación $\vec{v} \neq (0,0)$ la aplicación resulta ser la identidad.

Como ningún punto se queda fijo, no existen rectas invariantes de puntos fijos pero si hay rectas que se transforman en sí mismas. El vector de traslación de *t* es (4,-1). Si *r* es una recta paralela a la dirección (4,-1), esta recta será invariante ya que sus puntos se deslizarán por ella cuando se les aplique la traslación. Por tanto todas las rectas paralelas al vector de traslación son invariantes.

**P1.3** Dada la traslación de ecuación $t(X) = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X$, se pide determinar la imagen de la recta de ecuación $s : x_1 + x_2 + 3 = 0$.

**Solución**

El vector de dirección de la recta *s* es (-1,1). Esta recta no es invariante por lo dicho en el problema P1.2. Veamos en qué se transforma.

Para hallar la imagen de la recta tomamos un punto *A* de la recta y su vector de dirección $\vec{u}$:

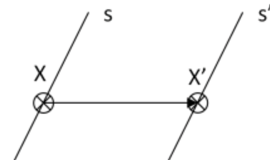
$$A = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Transformamos el punto y el vector. Para transformar *A* utilizamos la ecuación de *t*, para trasformar $\vec{u}$ utilizamos la ecuación de la aplicación lineal asociada $\hat{t}$:

$$t(A) = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{t}(\vec{u}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{u}' = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Observar que *A* se ha transformado en otro punto *A'* pero $\vec{u}$ se ha transformado en sí mismo. Eso significa que las rectas *r* cuyo vector de dirección no es (4,-1) se transforman en rectas paralelas a *r*.




En el caso particular de *s* su imagen *s'* es una recta paralela a *s* que pasa por *A'*.
Por ser *s'* paralela a *s* escribimos

$$s': x_1 + x_2 + k = 0$$

Como *s'* pasa por *A'* sustituimos las coordenadas de *A'* en la ecuación anterior

$$1 + (-1) + k = 0$$

El valor de *k* es cero por tanto la ecuación de *s'* es

$$s': x_1 + x_2 = 0$$

**P1.4** Dada la traslación de ecuación $t(X) = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X$, se pide determinar las ecuaciones de la transformación $f \circ t$ siendo *f* la traslación de vector $\vec{u} = (3,5)$.

**Solución**

Vamos a componer dos traslaciones y ver cuál es el resultado final

$$(f \circ t)(X) = f(t(X)) = \vec{u} + (\vec{v} + X) = (\vec{u} + \vec{v}) + X$$

Por tanto la composición de dos traslaciones es otra traslación de vector la suma de los vectores de traslación de ambas traslaciones:

$$t_u \circ t_v = t_{u+v}$$

El vector de la traslación de *f* es (3,5) y el vector de la traslación de t es (-4,1) la composición de ambas aplicaciones es una traslación de vector (3,5)+(4,-1)=(7,4)

$$(f \circ t)(X) = f(t(X)) = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X$$

**P1.5** Dada la traslación de ecuación $t(X) = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X$, hallar la transformación inversa de *t*.

**Solución**

La transformación inversa de *t* es otra aplicación biyectiva $t^{-1}$ tal que

$$t^{-1} \circ t = t \circ t^{-1} = id$$

Si $X' = v + X \Rightarrow X = -v + X'$ ecuación que representa a una traslación de vector $-\vec{v}$ :

$$(t_v)^{-1} = t_{-v}$$

Por tanto la solución a este apartado es la traslación de ecuación

$$t^{-1}(X) = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X$$

**P1.6.** Una vez que sabemos qué es una traslación y sus propiedades, podríamos buscar distintas formas de abordar este tipo de problemas.

Dada la traslación de ecuación $t(X) = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X$ , se pide determinar:

1. Las rectas invariantes.
2. La imagen de la recta de ecuación $s: 2x_1 + x_2 + 3 = 0$.
3. La transformación inversa de *t*.
4. las ecuaciones de la transformación $f \circ t$ siendo *f* la traslación de vector $\vec{u} = (1,2)$

**Solución**

1. El vector de traslación de *t* es (7,3). Si *r* es una recta paralela a esta dirección será invariante.
2. El vector de dirección de la recta *s* es (-1,2). Esta recta no es invariante porque no es paralela al vector (7,3). Veamos en qué se transforma.

Para hallar la imagen de la recta tomamos las ecuaciones de la traslación

$$\begin{cases} y_1 = 7 + x_1 \\ y_2 = 3 + x_2 \end{cases},$$

despejamos

$$\begin{cases} x_1 = -7 + y_1 \\ x_2 = -3 + y_2 \end{cases}$$

y sustituimos en la ecuación de la recta $s: 2x_1 + x_2 + 3 = 0$ obteniendo

$$2(-7 + y_1) + (-3 + y_2) + 3 = 0 \Rightarrow 2y_1 + y_2 - 14 = 0$$

Por tanto *s* se transforma en la recta

$$s': 2y_1 + y_2 - 14 = 0$$

3. La transformación inversa de t es:

$$(t_v)^{-1} = t_{-v}$$

Por tanto la solución a este apartado es la traslación de ecuaciones

$$t^{-1}(X) = \begin{pmatrix} -7 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X$$

4. Al componer dos traslaciones el resultado es otra traslación: $t_u \circ t_v = t_{u+v}$ entonces

$$(f \circ t)(X) = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X$$

***TRASLACIONES***

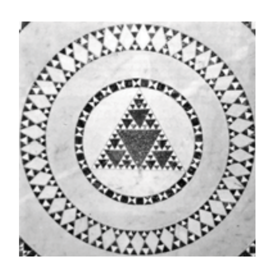
*Sean $t_u, t_v$ traslaciones definidas en el plano con referencia R. Se cumple:*

- $t_u \circ t_v = t_{u+v}$
- $(t_v)^{-1} = t_{-v}$
- *Las traslaciones de vector $\vec{u} \neq (0,0)$ son transformaciones que no dejan fijos los puntos del plano.*
- *Todas las rectas paralelas al vector de traslación son invariantes.*
- *Efecto de una traslación sobre un triángulo*



## 2. HOMOTECIAS

Observa este detalle del suelo de la Basílica de Santa María de Trastévere



Fíjate bien en el triángulo central. ¿Conoces el término fractal? ¿Y triángulo de Sierpinski? Esta figura está formada por triángulos de distinto tamaño relacionados entre sí por homotecias. Además el contenido del triángulo más grande tiene un ritmo de decrecimiento de las figuras que nos recuerda constantemente a dicho triángulo.

Estudiemos las homotecias en el plano respecto de la referencia $R=\left(O,B=\{\vec{e}_1,\vec{e}_2\}\right)$.

**P2.1.** Dada la homotecia de centro C=(1,2) y razón k=5. Hallar sus ecuaciones.

**Solución**

Una homotecia de centro C y razón k que transforma X en X’

C X X’

cumple que $CX'=kCX$ por tanto

$$X'-C=k(X-C)\Rightarrow X'=(1-k)C+kX$$

Que podemos escribir, utilizando la aplicación identidad, como

$$X'=(1-k)C+kIX$$

Tomando $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},\quad X'=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}$ tenemos

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=(1-k)\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}k&0\\0&k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$$

En el caso que nos ocupa

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=(1-5)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5&0\\0&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}y_1=-4+5x_1\\y_2=-8+5x_2\end{cases}$$

Repasemos algunas propiedades de las homotecias

**P2.2.** Dada la homotecia $h$ de centro C=(3,-2) y razón k=6. Hallar las ecuaciones de $h^{-1}$.

**Solución**

La homotecia de centro C y razón k tiene esta ecuación

$$X'=(1-k)C+kX$$

Como $k\neq 0$, despejando X obtenemos la función inversa

$$X=\frac{-(1-k)}{k}C+\frac{1}{k}X'$$

O bien

$$X=\left(1-\frac{1}{k}\right)C+\frac{1}{k}X'$$

Vemos que es una homotecia de razón $\frac{1}{k}$ y centro $C$

Por tanto la solución a nuestro problema es

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \left(1 - \frac{1}{6}\right)\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{1}{6}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Operando

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 15 \\ -10 \end{pmatrix} + \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

**P2.3.** Halla la composición de la homotecia *h* con la homotecia *f*

$$h: \begin{cases} y_1 = 7 + 3x_1 \\ y_2 = 3 + 3x_2 \end{cases} \qquad f: \begin{cases} y_1 = 1 + 5x_1 \\ y_2 = -2 + 5x_2 \end{cases}$$

**Solución**

Si escribimos matricialmente estas homotecias nos queda

Ecuación de *h:* $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Ecuación de *f:* $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Componemos $f \circ h$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right)$$

Simplificando

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 \\ 13 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 15 & 0 \\ 0 & 15 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Que es la ecuación de una homotecia de razón 15. Calculemos su centro:

Si comparamos la ecuación de la homotecia obtenida con la ecuación general de una homotecia

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = (1-k)\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Vemos que

$$(1-k)\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 \\ 13 \end{pmatrix}$$

Entonces $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{-14}\begin{pmatrix} 36 \\ 13 \end{pmatrix}$ son las coordenadas del centro de la homotecia.

**P2.4.** Hallar la composición de la homotecia *h* con la homotecia *f*

$$h:\begin{cases} y_1 = 6 + 3x_1 \\ y_2 = 9 + 3x_2 \end{cases} \qquad f:\begin{cases} y_1 = 7 + \frac{1}{3}x_1 \\ y_2 = -4 + \frac{1}{3}x_2 \end{cases}$$

**Solución**

Si escribimos matricialmente estas homotecias nos queda

Ecuación de *h:* $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Ecuación de *f:* $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Componemos $f \circ h$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right)$$

Operamos

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Es la ecuación de una traslación de vector (9,-1)

Tras observar los resultados de los problemas P2.3 y P2.4 recordamos que la composición de homotecias puede dar lugar a una homotecia, a una traslación o a la identidad.

**P2.5.** Hallar los puntos fijos de la homotecia de centro (1,3) y razón 3.

**Solución**

La ecuación de esta homotecia es

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

La ecuación que cumplen los puntos fijos es $h(X) = X$, entonces resolvemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x_1 = -2 + 3x_1 \\ x_2 = -6 + 3x_2 \end{cases}$$

La solución es $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 3 \end{cases}$ que coincide con el centro de la homotecia.

Esto ocurre para cualquier homotecia. El único punto fijo es su centro.

Si la homotecia cumple que $CX' = kCX$ entonces el punto fijo cumple $CX = kCX$, siendo $k \in R, k \neq 0, k \neq 1$ por tanto $CX = \vec{0}$ luego $X = C$

**P2.6.** Dada la homotecia $h$ de centro (1,3) y razón 3, hallar la imagen de la recta $r: 2x_1 + x_2 - 5 = 0$

**Solución**

La ecuación de esta homotecia es

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

*A*=(0,5) pertenece a la recta. El vector de *r* es $\vec{v} = (-1,2)$

Transformamos el punto y el vector

$$h(A) = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\hat{h}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Como el vector (-3,6) es proporcional al de la recta *r*, resulta que la recta *r'* es paralela a *r*.

$$r': 2x_1 + x_2 + k = 0$$

Sustituimos las coordenadas del punto *A'* en *r'* y obtenemos el valor de k

$$2(-2) + 9 + k = 0 \Rightarrow k = -5$$

$$r': 2x_1 + x_2 - 5 = 0$$

Por tanto *r* se transforma en sí misma, *r* es una recta invariante.

r

C A A'

No existen rectas de puntos fijos pues en el apartado anterior planteamos la ecuación de los puntos fijos y obtuvimos como resultado un punto.

Pero si hay rectas que se transforman en sí mismas, aquellas que contienen al centro de homotecia.

**P2.7.** Dada la homotecia $h$ de centro (1,3) y razón 3, hallar la imagen de la recta $s: x_1 + 4x_2 - 2 = 0$

**Solución**

Primero comprobamos si el centro de la homotecia pertenece a la recta *s* sustituyéndolo en la ecuación de la recta

$$1 + 4(3) - 2 = 11 \neq 0$$

El centro no pertenece a la recta entonces la recta no se transforma en sí misma.

La ecuación de esta homotecia es

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

*A*=(2,0) pertenece a la recta. El vector de dirección de *s* es $\vec{v} = (-4,1)$.

Transformamos el punto y el vector

$$h(A)=\begin{pmatrix}-2\\-6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-6\end{pmatrix}$$

$$\hat{h}(\vec{v})=\begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-12\\3\end{pmatrix}$$

El vector obtenido (-12,3) es proporcional al vector (-4,1) que es el vector de la recta *s*, resulta que la recta *s'* es paralela a *s*.

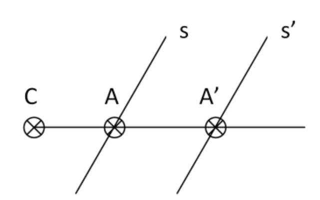
$$s': x_1+4x_2+k=0$$

Sustituimos el punto *A'* en *s'* y obtenemos el valor de k

$$4+4(-6)+k=0 \Rightarrow k=20$$

$$s': x_1+4x_2+20=0$$

La recta *s'* es paralela a *s*

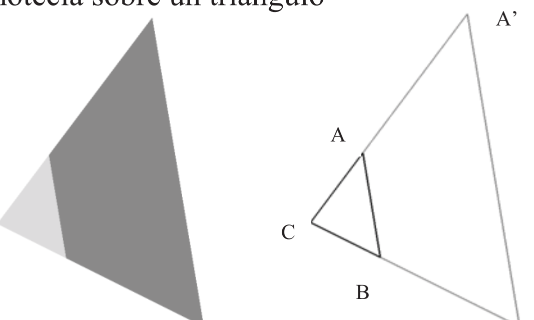



Resumimos lo que sabemos sobre homotecias

***HOMOTECIAS***

*Sean C, C' y X puntos del plano afín con referencia y* $k\in R, k\neq 0, k\neq 1$

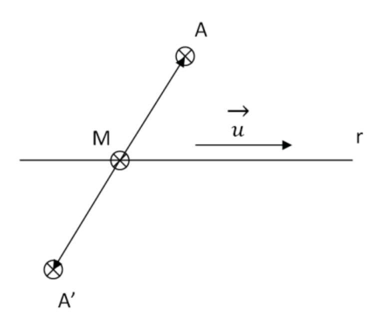
- *Si X' es el transformado de X por la homotecia de centro C y razón k se cumple que* $CX'=kCX$.
- *Matricialmente* $\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=(1-k)\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}k&0\\0&k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$.
- *La composición de homotecias puede dar lugar a una homotecia, a una traslación o a la identidad.*
- $\left(h_k^{\,C}\right)^{-1}=h_{\frac{1}{k}}^{\,C}$
- *Toda homotecia tiene un único punto fijo, su centro.*
- *Las rectas que contienen al centro de homotecia se transforman en sí mismas.*
- *Las rectas que no contienen al centro de homotecia se transforman en rectas paralelas a ellas.*
- Efecto de una homotecia sobre un triángulo



## 3. SIMETRÍAS OBLICUAS

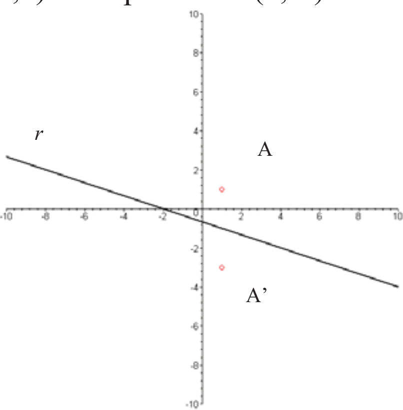
Una simetría oblicua respecto a una recta *r* del plano es una trasformación que cumple las siguientes condiciones geométricas:

- Dado un punto *A* del plano y su transformado *A'* por la simetría oblicua, se cumple que el punto medio de *A* y *A'* está en *r*.
- Los puntos de la recta *r* son puntos fijos. Por tanto el vector de la recta *r* es invariante.




Llamemos *M* al punto medio de *A* y *A'*: $M=\dfrac{A+A'}{2}$ entonces el vector $MA$ se transforma en el vector $MA'$ ya que por ser *M* un punto de la recta *r* este punto es fijo. Por otro lado el vector $\vec{u}$ de la recta *r* es invariante así que se transforma en sí mismo.

**P3.1.** Hallar la ecuación de la simetría oblicua respecto de la recta $r: x_1+3x_2+2=0$ que transforma el punto *A*=(1,1) en el punto *A'*=(1,-3)




**Solución**

La ecuación de la aplicación afín es de la forma

$$X'=b+NX$$

Empecemos determinando la matriz *N* de la aplicación lineal asociada. Para ello elijamos dos vectores linealmente independientes de los cuales conozcamos su imagen.

El vector de la recta *r*, $\vec{u}=(-3,1)$ es invariante

$$\hat{f}(\vec{u})=\vec{u}$$

El vector *MA* se transforma en el vector *MA'*

$$\hat{f}(MA)=MA'$$

siendo *M* el punto medio de *A* y *A'*

Hallemos *M*

$$M = \frac{A + A'}{2} = \frac{1}{2}\big((1,1) + (1,-3)\big) = \frac{1}{2}(2,-2) = (1,-1)$$

$$MA = A - M = (1,1) - (1,-1) = (0,2)$$
$$MA' = A' - M = (1,-3) - (1,-1) = (0,-2)$$

cuyas expresiones respecto de $B = \{e_1, e_2\}$ de la referencia R son

$$MA = 2\vec{e}_2$$
$$MA' = -2\vec{e}_2$$

Recordemos que

$$\hat{f}(MA) = MA'$$
$$\hat{f}(\vec{u}) = \vec{u}$$

Con esta información podemos plantear las siguientes ecuaciones

$$\begin{cases} \hat{f}(2\vec{e}_2) = -2\vec{e}_2 \\ \hat{f}(-3\vec{e}_1 + \vec{e}_2) = -3\vec{e}_1 + \vec{e}_2 \end{cases}$$

Por ser $\hat{f}$ una aplicación lineal podemos escribir

$$\begin{cases} 2\hat{f}(\vec{e}_2) = -2\vec{e}_2 \\ -3\hat{f}(\vec{e}_1) + \hat{f}(\vec{e}_2) = -3\vec{e}_1 + \vec{e}_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{f}(\vec{e}_2) = -\vec{e}_2 \\ \hat{f}(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 - \frac{2}{3}\vec{e}_2 \end{cases}$$

entonces la expresión matricial de la aplicación lineal es

$$\hat{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & -1 \end{pmatrix}\vec{x}$$

Tenemos entonces que determinar *b* de la expresión de la aplicación afín

$$f(X) = b + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & -1 \end{pmatrix} X$$

Sabemos que *A* se transforma en *A'* entonces

$$A' = b + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & -1 \end{pmatrix} A$$

sustituyendo

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = b + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

despejando

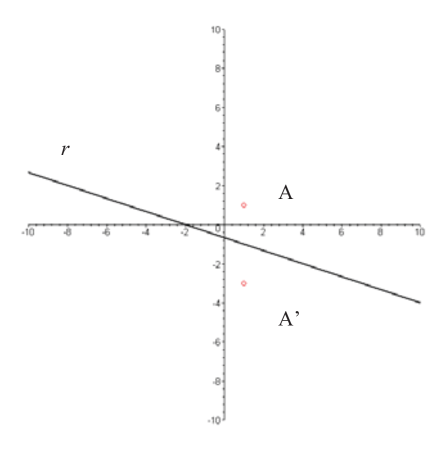
$$b=\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1 & 0\\-\frac{2}{3} & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\Rightarrow b=\begin{pmatrix}0\\-\frac{4}{3}\end{pmatrix}$$

obtenemos

$$f(X)=\begin{pmatrix}0\\-\frac{4}{3}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\-\frac{2}{3} & -1\end{pmatrix}X$$

Veamos otro planteamiento para este problema

**P3.2.** Hallar la ecuación de la simetría oblicua respecto de la recta $r: x_1+3x_2+2=0$ que transforma el punto *A*=(1,1) en el punto *A'*=(1,-3).




**Solución**

Conociendo las imágenes de tres puntos independientes podemos resolver el problema como planteábamos al comienzo de este libro.

Si

$$X'=b+NX$$

entonces

$$\begin{pmatrix}N & b\\ \vec{0} & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A' & B' & C'\\1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & B & C\\1 & 1 & 1\end{pmatrix}^{-1}$$

Tomemos los puntos *A, M* y *P*. *M* es el punto medio de *A* y *A'*, y *P* es un punto de r distinto de *M*.

Estos puntos se transforman de la siguiente manera

$$A=(1,1)\to A'=(1,-3)$$
$$M=(1,-1)\to M'=(1,-1)$$
$$P=(-2,0)\to P'=(-2,0)$$

entonces

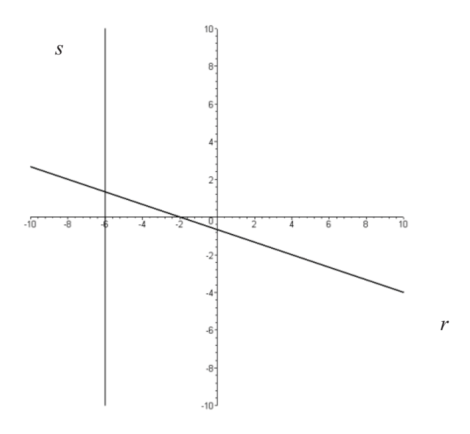
$$\begin{pmatrix}N & b\\ \vec{0} & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A' & M' & P'\\1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & M & P\\1 & 1 & 1\end{pmatrix}^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} N & b \\ \vec{0} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & -1 & \frac{-4}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f(X) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-4}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & -1 \end{pmatrix} X$$

**P3.3** Dada la simetría oblicua respecto de la recta $r: x_1 + 3x_2 + 2 = 0$ que transforma el punto *A*=(1,1) en el punto *A'*=(1,-3) halla la imagen de la recta $s: x_1 + 6 = 0$




**Solución**

Un punto de la recta *s* es *P*=(-6,0) y su vector de dirección es $\vec{v} = (0,1)$

Para hallar la imagen de *s* calculamos las imágenes de *P* y $\vec{v}$

$$P' = f(P) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-4}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

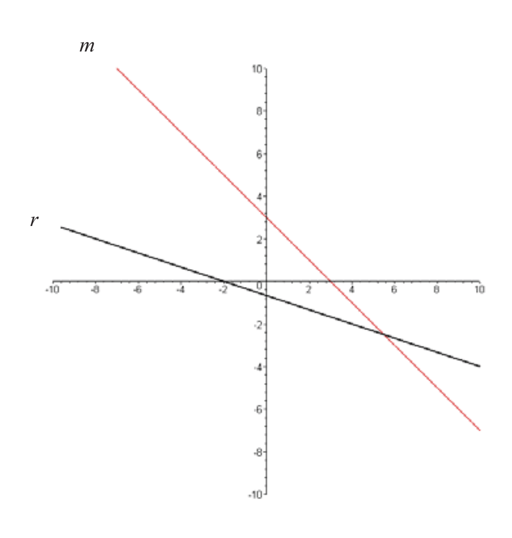
$$\vec{v}' = \hat{f}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

La recta *s'* pasa por *P'* y su dirección es *v'* y su ecuación es

$$s': x_1 + 6 = 0$$

Observar que la recta *s* es invariante y paralela a la dirección *AA'*

**P3.4** Dada la simetría oblicua respecto de la recta $r: x_1 + 3x_2 + 2 = 0$ que transforma el punto *A*=(1,1) en el punto *A'*=(1,-3) halla la imagen de la recta $m: x_1 + x_2 - 3 = 0$




**Solución**

Un punto de la recta *m* es *P*=(3,0) y su vector de dirección es $\vec{v} = (-1,1)$

Para hallar la imagen de *m* calculamos las imágenes de *P* y $\vec{v}$

$$P' = f(P) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-4}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -\frac{10}{3} \end{pmatrix}$$

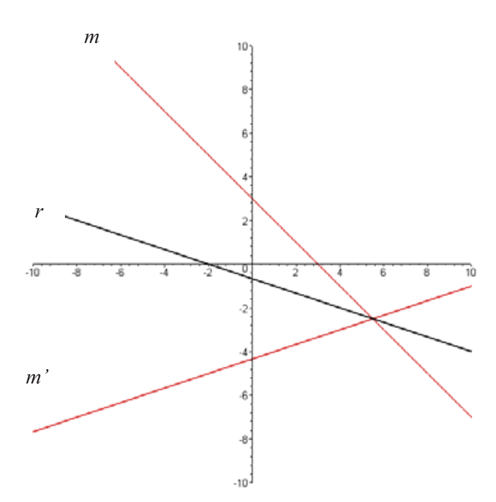
$$\vec{v}' = \hat{f}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

La recta *m'* pasa por *P'* y su dirección es $\vec{v}$ y su ecuación es

$$m': x_1 - 3x_2 - 13 = 0$$

Las rectas *m* y *m'* no son paralelas.

Observar que la recta *m* no es paralela a la dirección *AA'*



***SIMETRÍAS OBLICUAS***

*Sea $f$ la simetría oblicua respecto a la recta $r: X = P + \alpha\vec{v}$ del plano, $A$ punto del plano, A' su transformado por f y M el punto medio de A y A', se cumple*

$$\begin{cases} \hat{f}(\vec{v}) = \vec{v} \\ \hat{f}(MA) = MA' \end{cases}$$

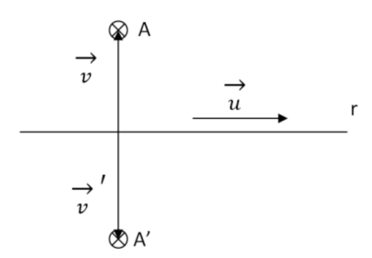
$$f(P) = P$$

- *La recta r es una recta de puntos fijos*
- *Las rectas paralelas al vector AA' son invariantes*

## 4. SIMETRÍAS ORTOGONALES

Una simetría ortogonal respecto a una recta *r* del plano es una trasformación que cumple las siguientes condiciones geométricas:

- Dado un punto *A* del plano y su transformado *A'* por la simetría se cumple que el punto medio de *A* y *A'* está en *r*.
- Los puntos de la recta *r* son puntos fijos.
- El vector ortogonal a la recta se convierte en su opuesto.




La simetría ortogonal es un caso particular de simetría oblicua en el que el vector *AA'* es ortogonal a *r*.
Si *r* es la recta del plano que pasa por P y su vector de dirección es *v*, llamando *w* al vector ortogonal a *v* se cumple

$$\begin{cases} \hat{f}(\vec{v}) = \vec{v} \\ \hat{f}(\vec{w}) = -\vec{w} \end{cases}$$

$$f(P) = P$$

**P4.1** Hallar la ecuación de la simetría ortogonal respecto de la recta $r: x_1 + 3x_2 + 2 = 0$.

**Solución**

El vector de la recta es $\vec{v} = (-3,1)$ y el vector ortogonal de $\vec{v}$ es $\vec{w} = (1,3)$ entonces

$$\begin{cases} \hat{f}(-3\vec{e}_1 + \vec{e}_2) = -3\vec{e}_1 + \vec{e}_2 \\ \hat{f}(\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2) = -\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 \end{cases}$$

estas ecuaciones nos permiten hallar la matriz N de la aplicación lineal asociada tal que

$$X' = b + NX$$

$$\begin{cases} -3\hat{f}(\vec{e}_1) + \hat{f}(\vec{e}_2) = -3\vec{e}_1 + \vec{e}_2 \\ \hat{f}(\vec{e}_1) + 3\hat{f}(\vec{e}_2) = -\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{f}(\vec{e}_1) = \frac{4}{5}\vec{e}_1 - \frac{3}{5}\vec{e}_2 \\ \hat{f}(\vec{e}_2) = -\frac{3}{5}\vec{e}_1 - \frac{4}{5}\vec{e}_2 \end{cases}$$

entonces

$$N = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$$

hallemos $b$ de la expresión $X' = b + NX$

Como los puntos de la recta son puntos fijos, el punto $P = (-2,0)$ de la recta cumple que:

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} = b + \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$b = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$f(X) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 \\ -6 \end{pmatrix} + \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}X$$

**P4.2** Sea *f* la simetría ortogonal respecto de la recta $r: x_1 + 3x_2 + 2 = 0$ y *m* la recta de ecuación . $m: x_1 + 3x_2 - 1 = 0$ . Hallar la ecuación de la recta *f*(*m*).

**Solución**

Por el problema anterior sabemos que la ecuación de *f* es

$$f(X) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 \\ -6 \end{pmatrix} + \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}X$$

Un punto de la recta *m* es *P*=(1,0) y su vector de dirección es $\vec{v} = (-3,1)$

Para hallar la imagen de *m* calculamos las imágenes de *P* y *v*

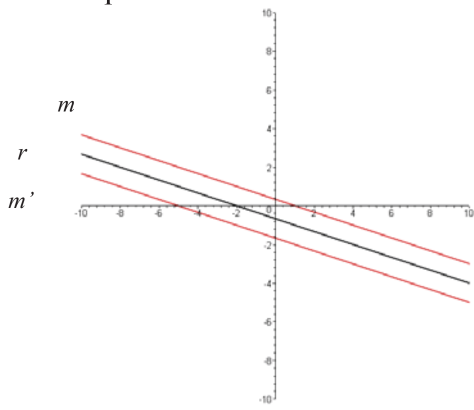
$$P' = f(P) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 \\ -6 \end{pmatrix} + \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}' = \hat{f}(\vec{v}) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La recta *m'* pasa por *P'* y su dirección es *v'* y su ecuación es

$$m': x_1 + 3x_2 + 5 = 0$$

Observar que *r,m* y *m'* son paralelas




Estas aplicaciones se tratan con más profundidad en el cuadernillo (II)

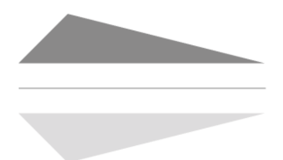
***SIMETRÍAS ORTOGONALES***

*Sea* $f$ *la simetría ortogonal respecto a la recta* $r: X = P + \alpha\vec{v}$ *del plano,* $A$ *punto del plano, A' su transformado por f. Se cumple*

$$\begin{cases} \hat{f}(\vec{v}) = \vec{v} \\ \hat{f}(\vec{w}) = -\vec{w} \end{cases}$$

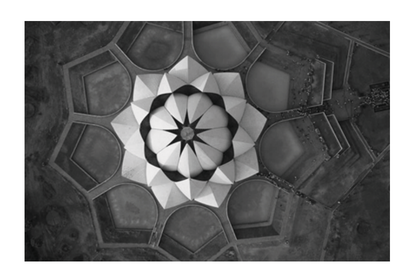
$$f(P) = P$$

- *La recta r es una recta de puntos fijos*
- *Las rectas ortogonales a r son rectas invariantes*
- *Las rectas paralelas a r se transforman en rectas paralelas a r*
- Efecto sobre un triángulo



## 5. GIROS

Seguro que al recorrer esta foto del templo de Loto de Nueva Delhi con la mirada, lo habéis hecho entorno a su centro, girando hasta volver al punto inicial.



Un giro es una transformación afín del plano y su ecuación es por tanto de la forma

$$f(X) = b + NX$$

La aplicación lineal asociada es una transformación ortogonal eso significa que $\hat{f}$ conserva el producto escalar y su matriz $N$ es ortogonal y regular cumpliéndose que

$$NN^t = I$$
$$\det(N) = \pm 1$$




Estos dos triángulos T y T', están relacionados porque uno es el transformado del otro mediante un giro, $f$(T)=T'. Tienen la misma forma, cada lado de T mide lo mismo que su transformado, al igual que sus ángulos.

La ecuación de un giro de centro $C$ y ángulo $\alpha$ es de la forma

$$f(X) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -sen(\alpha) \\ sen(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} X$$

Y se cumple que

$$G_{\alpha}^{C}(C) = C$$

Es decir el centro de giro es el punto fijo de la transformación.

**P5.1** Sea f un giro de centro C=(1,3) y ángulo $\alpha = 90^{\circ}$. Hallar su ecuación.

**Solución**

La ecuación de un giro es de la forma

$$f(X) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -sen(\alpha) \\ sen(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} X$$

Entonces

$$f(X)=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}X$$

De los giros sabemos que el centro de giro es un punto:

$$G_{\alpha}^{C}(C)=C$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Despejando

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

La expresión matricial de *f* es

$$f(X)=\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}X$$

**P5.2** Sea *f* la aplicación $f(X)=\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}X$. ¿Es un giro?

**Solución**

Los giros se caracterizan porque la matriz *N* es ortogonal, el determinante de *N* es 1 y tiene un único punto fijo. Comencemos comprobando si la matriz es ortogonal:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{t}=I$$

Por tanto *N* es ortogonal. Veamos el determinante

$$\det(N)=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}=1$$

Hallemos los puntos fijos

$$f(X)=X$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}X=X$$

Tomando $X=(x_1,x_2)$, esta expresión se llega al siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} -x_1+x_2=-3 \\ -x_1-x_2=-5 \end{cases}$$

cuya solución es $X=(4,1)$ que es el centro de giro.

Para saber el ángulo de giro nos fijamos en la matriz de la transformación

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -sen(\alpha) \\ sen(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$sen(\alpha) = -1$$
$$\cos(\alpha) = 0$$

El valor del ángulo es $\alpha = 270^\circ$.

**P5.3** Expresar en una sola matriz el giro $G_\alpha^C(X) = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} X$.

**Solución**

En ocasiones es cómodo escribir la ecuación con una sola matriz de la siguiente forma:

$$G_\alpha^C(X) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

**P5.4** Se consideran el giro $G_\alpha^C(X) = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} X$ y el giro $G_\beta^{C'}(X) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{-\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} X$. Hallar la aplicación $G_\alpha^C \circ G_\beta^{C'}$ y clasificar.

**Solución**

$$\left(G_\alpha^C \circ G_\beta^{C'}\right)(X) = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{-\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} X \right]$$

$$(G_\alpha^C \circ G_\beta^{C'})(X) = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} X$$

Para clasificar esta isometría comprobamos si la matriz es ortogonal

$$\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto es ortogonal. Veamos el determinante

$$\begin{vmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} = 1$$

Entonces es un giro de ángulo $\alpha + \beta = \pi - \frac{\pi}{4}$.

***GIROS***

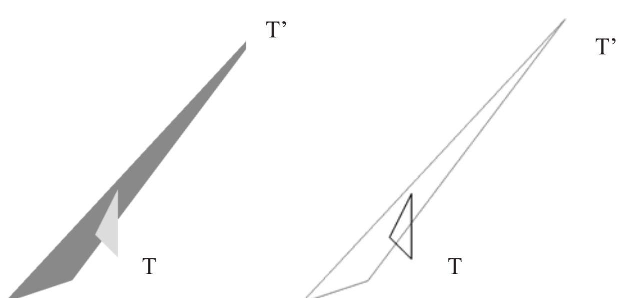
*Sea* $G_\alpha^C$ *un giro en el plano de ángulo α y centro C*

- *Su expresión es*
$$G_\alpha^C(X) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -sen(\alpha) \\ sen(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} X$$
- La aplicación lineal asociada es una transformación ortogonal eso significa que $\hat{f}$ conserva el producto escalar y su matriz *N* es ortogonal $NN^t = I$
- *La aplicación* $G_\alpha^C$ *es biyectiva,* $\det(N) = 1$
- $G_\alpha^C$ *transforma rectas en rectas.*
- *El punto fijo de* $G_\alpha^C$ *es C.*
- *Existe la transformación afín inversa para todo giro y es otro giro.* $G_\alpha^C \circ G_{-\alpha}^C = Id$
- *La composición de dos giros es un giro o la identidad* $\begin{cases} G_\alpha^C \circ G_\beta^{C'} = G_{\alpha+\beta}^{C''} \\ G_\alpha^C \circ G_\beta^C = G_{\alpha+\beta}^C \\ G_\alpha^C \circ G_{-\alpha}^C = id \end{cases}$

## 6. TRANSFORMACIONES AFINES EN GENERAL

Veamos algunas transformaciones afines del plano.

**P6.1.** Hallar la ecuación de la aplicación afín que transforma el triángulo de vértices en los puntos *A*=(1,1), *B*=(2,3), *C*=(2,0) en el triángulo de vértices *A'*=(-3,-2), *B'*=(9,11), *C'*=(0,-1).




**Solución**

Sabemos que

$$\begin{pmatrix} A' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N & b \\ \vec{0} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} B' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N & b \\ \vec{0} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} C' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N & b \\ \vec{0} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y por tanto

$$\begin{pmatrix} N & b \\ \vec{0} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A' & B' & C' \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B & C \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

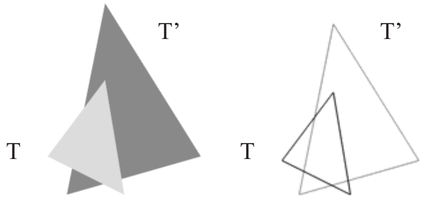
En nuestro caso las ecuaciones son

$$\begin{pmatrix} N & b \\ \vec{0} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 9 & 0 \\ -2 & 11 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -12 \\ 5 & 4 & -11 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$N = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -12 \\ -11 \end{pmatrix}$$

$$f(X) = \begin{pmatrix} -12 \\ -11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} X$$

**P6.2.** Hallar la ecuación de la aplicación afín que transforma el triángulo de vértices en los puntos *A*=(-1,1), *B*=(2,5), *C*=(3,-1) en el triángulo de vértices *A'*=(0,-1), *B'*=(7,1), *C'*=(2,9).




**Solución**

La expresión de la aplicación lineal es

$$X' = b + NX$$

Calculamos primero la matriz de la aplicación lineal, *N*. Para ello necesitamos conocer las imágenes de dos vectores linealmente independientes.

$$A = (-1,1), B = (2,5) \rightarrow AB = B - A = (3,4)$$
$$A = (-1,1), C = (3,-1) \rightarrow AC = C - A = (4,-2)$$

*AB* y *AC* son vectores linealmente independientes sus imágenes son *A'B'* y *A'C'* respectivamente

$$A'B' = B' - A' = (7,2)$$
$$A'C' = C' - A' = (2,10)$$

$$\hat{f}(AB) = A'B'$$
$$\hat{f}(AC) = A'C'$$

Por tanto

$$\begin{cases} \hat{f}(3\vec{e}_1+4\vec{e}_2)=7\vec{e}_1+2\vec{e}_2 \\ \hat{f}(4\vec{e}_1-2\vec{e}_2)=2\vec{e}_1+10\vec{e}_2 \end{cases}$$

Por ser $\hat{f}$ aplicación lineal

$$\begin{cases} 3\hat{f}(\vec{e}_1)+4f(\vec{e}_2)=7\vec{e}_1+2\vec{e}_2 \\ 4\hat{f}(\vec{e}_1)-2f(\vec{e}_2)=2\vec{e}_1+10\vec{e}_2 \end{cases}$$

La solución de este sistema de ecuaciones es

$$\begin{cases} \hat{f}(\vec{e}_1)=\vec{e}_1+2\vec{e}_2 \\ \hat{f}(\vec{e}_2)=\vec{e}_1-\vec{e}_2 \end{cases}$$

La matriz de $\hat{f}$ es

$$N=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Sólo nos queda calcular *b*

$$X'=b+NX \Rightarrow b=X'-NX$$

Sustituyendo *A* y *A'* en la ecuación

$$b=\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$X'=\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}X$$

**P6.3** Sea $f$ la transformación $f(X)=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}X$ ¿Tiene puntos fijos?

**Solución**

Planteamos la ecuación de los puntos fijos

$$f(X)=X$$

$$b+NX=X \Rightarrow b=X-NX \Rightarrow b=IX-NX \Rightarrow b=(I-N)X$$

$$(N-I)X=-b$$

El sistema de ecuaciones que tenemos que resolver es

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}X=\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Como el rango de la matriz de los coeficientes es 2, y el rango de la matriz ampliada es 2 el sistema es compatible determinado por tanto tiene solución única, lo cual significa que tiene un único punto fijo.

La solución de este sistema de ecuaciones es *P*=(-2,-2).

**P6.4** Sea $f$ la transformación $f(X)=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & -1\\1 & -2\end{pmatrix}X$. Hallar la transformación inversa de *f.*

**Solución**

La aplicación $f$ tiene por ecuación

$$f(X)=b+NX$$

O bien

$$Y=b+NX$$

Como *f* es biyectiva podemos despejar X

$$X=N^{-1}(Y-b)$$

$$X=-N^{-1}b+N^{-1}Y$$

Que se puede reescribir como

$$g(Y)=-N^{-1}b+N^{-1}Y$$

En este caso

$$g(Y)=(-1)\begin{pmatrix}3 & -1\\1 & -2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & -1\\1 & -2\end{pmatrix}^{-1}Y$$

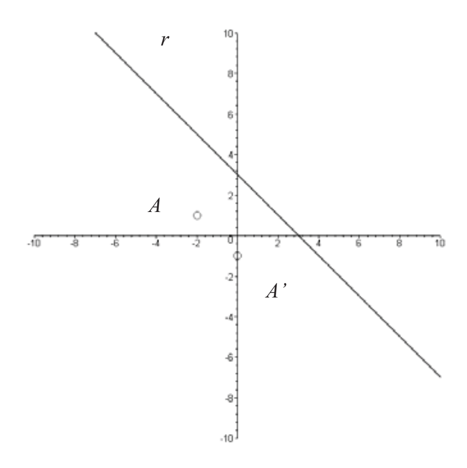
El resultado final es

$$g(Y)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{5}\\ \frac{2}{5}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{2}{5} & \frac{-1}{5}\\ \frac{1}{5} & \frac{-3}{5}\end{pmatrix}Y$$

Si componemos *f* y *g* obtenemos la identidad

$$(g\circ f)(X)=X$$

**P6.5.** Hallar la ecuación de la aplicación afín $f$ sabiendo que:
Transforma el punto $A$=(-2,1) en $A'$=(0,1) y la recta $r$:$x+y-3=0$ es una recta de puntos fijos




**Solución**

Sea *B*=(3,0) un punto de la recta *r* y por tanto un punto fijo, *B'=B,* y *v*=(-1,1) el vector de dirección de *r*.

$$A=(-2,1), B=(3,0) \rightarrow AB = B - A = (5,-1)$$
$$A'=(0,1), B'=(3,0) \rightarrow A'B' = B' - A' = (3,-1)$$

Sabemos que

$$\hat{f}(AB) = A'B'$$

Como *r* es una recta de puntos fijos su vector se transforma en sí mismo.

$$\hat{f}(\vec{v}) = \vec{v}$$

Por tanto

$$\begin{cases} \hat{f}(5\vec{e}_1 - \vec{e}_2) = 3\vec{e}_1 - \vec{e}_2 \\ \hat{f}(-\vec{e}_1 + \vec{e}_2) = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 \end{cases}$$

Por ser $\hat{f}$ aplicación lineal

$$\begin{cases} 5\hat{f}(\vec{e}_1) - \hat{f}(\vec{e}_2) = 3\vec{e}_1 - \vec{e}_2 \\ -\hat{f}(\vec{e}_1) + \hat{f}(\vec{e}_2) = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 \end{cases}$$

La solución de este sistema de ecuaciones es

$$\begin{cases} \hat{f}(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 \\ \hat{f}(\vec{e}_2) = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 \end{cases}$$

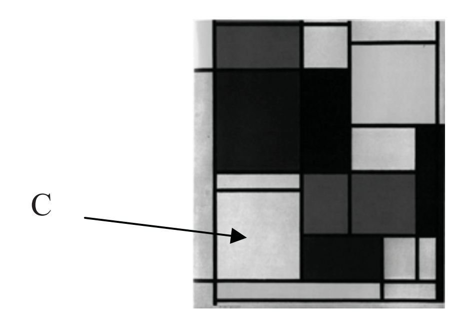
La matriz de $\hat{f}$ es

$$N = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La ecuación de la aplicación afín es

$$f(X) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} X$$

Observa este cuadro de Mondrian. El rectángulo C se puede transformar en cualquier otro rectángulo de la composición pictórica utilizando una transformación afín. Todos ellos son figuras afinmente equivalentes.



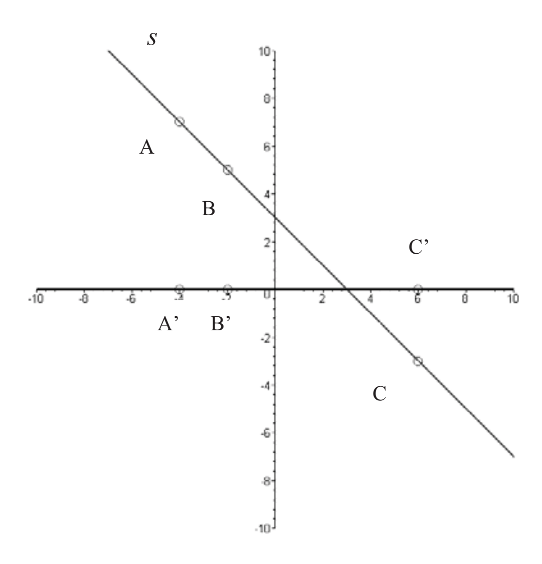
***TRANSFORMACIONES AFINES***

*Sea $f$ la transformación afín del plano de ecuación* $f(X) = b + NX$:

- *La aplicación lineal asociada es* $\hat{f}(X) = NX$
- *La imagen del origen de la referencia R es b*
- *Los puntos fijos de f cumplen la ecuación* $f(X) = X$
- *Las transformaciones afines transforman rectas en rectas,*
- *La aplicación f es biyectiva si* $\det(N) \neq 0$
- *Dados tres puntos independientes A, B, C y sus imágenes por f, A', B', C', se cumple:* $\begin{pmatrix} N & b \\ \vec{0} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A' & B' & C' \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B & C \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$
- *Dados dos vectores linealmente independientes u y v cuyas imágenes por* $\hat{f}$ son u', v' *se cumple* $N = (\vec{u}' \ \ \vec{v}')(\vec{u} \ \ \vec{v})^{-1}$
- *El conjunto de las aplicaciones afines biyectivas forman un grupo con la operación composición de aplicaciones, es decir:*
  1. *La composición de transformaciones afines es una transformación afín.*
  2. *La composición de transformaciones afines es asociativa.*
  3. *Existe la transformación afín inversa para toda transformación afín.*
  4. *La transformación identidad* $f(X) = X$ *es una transformación afín.*

## 7. APLICACIONES AFINES NO BIYECTIVAS

Una aplicación afín con la que seguramente estás familiarizado es la proyección. Proyecciones ortogonales o proyecciones oblicuas son algunas de las aplicaciones afines que has manejado en la asignatura de Dibujo técnico.
Al proyectar ortogonalmente los puntos $A$ y $B$ de la recta $s$ sobre el eje OX se obtiene la siguiente representación



Todos los puntos de la recta *s* se proyectan ortogonalmente sobre el eje OX, decimos entonces que el eje OX es la imagen de la recta *s*.
Podríamos plantearnos el problema de proyectar todos los puntos del plano sobre el eje OX es decir al punto de coordenadas (*x*,*y*) le correspondería el punto (*x*,0)

$$A=(x,y)\rightarrow A'=(x,0)$$

Entonces vectorialmente ocurre que

$$\vec{e}_1=(1,0)\rightarrow \hat{f}(\vec{e}_1)=(1,0)$$
$$\vec{e}_2=(0,1)\rightarrow \hat{f}(\vec{e}_2)=(0,0)$$

Por tanto, teniendo en cuenta que el origen es un punto fijo de la transformación, la expresión matricial de esta transformación es

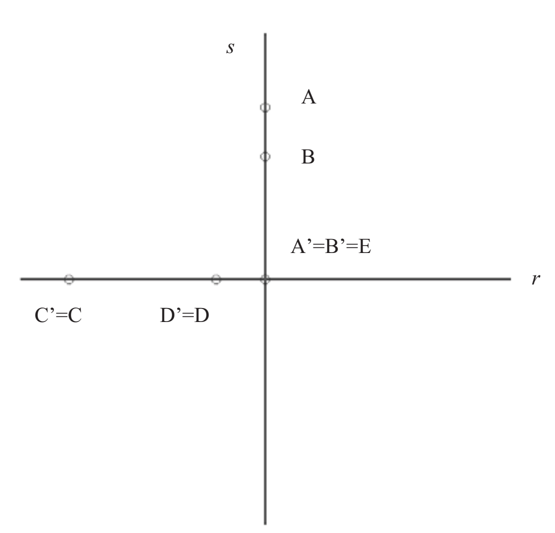
$$f(X)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}X$$

Si nos fijamos en la matriz, su determinante es cero por tanto no es biyectiva. Eso significa que todo el plano se va a transformar en un subespacio afín de dimensión menor, en este caso de dimensión 1 por ser una recta, el resultado de la proyección.
Veamos algunos ejemplos.

**P7.1.** Hallar la ecuación de la proyección ortogonal de los puntos del plano sobre la recta $r:2x_1+x_2+2=0$

**Solución**

Si representamos la recta *r* y otra recta *s* ortogonal a *r,* los puntos de la recta *s* se proyectan sobre el punto *E* de *r* tal que $E=r\bigcap s$.




Y los puntos de r son puntos fijos.
Vectorialmente podríamos escribir las siguientes igualdades:

$$AB \to \hat{f}(AB) = A'B' = EE = \vec{0}$$
$$CD \to \hat{f}(CD) = C'D' = CD$$

*AB* es el vector de dirección de la recta *s* y se convierte en el vector nulo.
*CD* es el vector de la recta *r* y es invariante por la aplicación.
Tomemos pues el vector de la recta *r, AB*=(-1,2) y el vector de la recta ortogonal *CD*=(2,1) y escribamos la condición anterior

$$\begin{cases} \hat{f}(-\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2) = -\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 \\ \hat{f}(2\vec{e}_1 + \vec{e}_2) = \vec{0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\hat{f}(\vec{e}_1) + 2\hat{f}(\vec{e}_2) = -\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 \\ 2\hat{f}(\vec{e}_1) + \hat{f}(\vec{e}_2) = \vec{0} \end{cases}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones tenemos

$$\begin{cases} \hat{f}(\vec{e}_1) = \frac{1}{5}\vec{e}_1 - \frac{2}{5}\vec{e}_2 \\ \hat{f}(\vec{e}_2) = -\frac{2}{5}\vec{e}_1 + \frac{4}{5}\vec{e}_2 \end{cases}$$

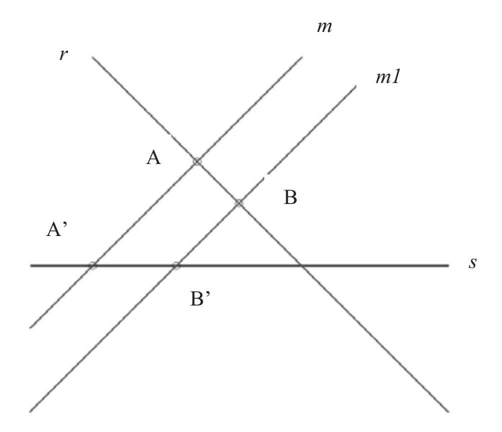
Como los puntos de la recta *r* se proyectan en sí mismos, son puntos fijos
Así *A*=(-1,0) es un punto fijo por pertenecer a *r,* entonces *f*(*A*)=*A*. Siguiendo la ecuación

$$X = b + NX \Rightarrow b = X - NX = (I - N)X$$

$$b = \begin{pmatrix} 1-\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & 1-\frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

$$f(X) = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

**P7.2.** Proyectar los puntos del plano sobre la recta $s: x_1 + x_2 - 1 = 0$ siguiendo la dirección de la recta $m: x_1 + 2x_2 + 1 = 0$.




**Solución**

Este tipo de transformación lleva todos los puntos del plano en la recta *s*, por tanto decimos que *Im(R² )=s,* el plano se transforma en la recta *s*.

$$f(R^2) = s$$

¿Qué va a ocurrir con las rectas *m1* y *m*? ¿En qué se van a transformar?
La imagen de la recta *m* es el punto de intersección de m con *s*, el punto *A'*.

$$f(m) = A'$$

La imagen de la recta m1 es el punto de intersección de m1 con, el punto *B'*.

$$f(m1) = B'$$

En este caso la imagen de una recta es un punto. Este tipo de aplicaciones no biyectivas transforman rectas en puntos es decir un subespacio afín se transforma en otro de dimensión igual o menor.

Empecemos calculando $A' = s \cap m$

$$s: x_1 + x_2 - 1 = 0$$
$$m: x_1 + 2x_2 + 1 = 0$$

*A'*=(3,-2)
Sea *m1* una recta paralela a *m*, $m1: x_1 + 2x_2 - 1 = 0$ y calculemos $B' = s \cap m1$

$$s: x_1 + x_2 - 1 = 0$$
$$m1: x_1 + 2x_2 - 1 = 0$$

*B'*=(1,0)
Los puntos de *s* son puntos fijos por tanto el vector de *s*, $\vec{v} = (-1,1)$ se transforma en sí mismo.
El punto *A*=(-1,0) se transforma en *A'*. Esto ocurre para cualquier punto de *m*.
El punto *B*=(-1,1) se transforma en *B'*. Esto ocurre para cualquier punto de *m1*.

Vectorialmente podríamos escribir las siguientes igualdades:

$$\hat{f}(AB) = A'B'$$
$$\hat{f}(\vec{v}_s) = \vec{v}_s$$

$$A=(-1,0), B=(-1,1)\rightarrow AB=B-A=(0,1)$$
$$A'=(3,-2), B'=(1,0)\rightarrow A'B'=B'-A'=(-2,2)$$

$$\begin{cases}\hat{f}(\vec{e}_2)=-2\vec{e}_1+2\vec{e}_2\\ \hat{f}(-\vec{e}_1+\vec{e}_2)=-\vec{e}_1+\vec{e}_2\end{cases}$$

entonces

$$\begin{cases}\hat{f}(\vec{e}_1)=-\vec{e}_1+\vec{e}_2\\ \hat{f}(\vec{e}_2)=-2\vec{e}_1+2\vec{e}_2\end{cases}$$

$$N=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

Hallando *b* nos queda

$$f(X)=\begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 1 & 2\end{pmatrix}X$$

## APLICACIONES AFINES NO BIYECTIVAS

*Sea $f$ la transformación afín del plano de ecuación* $f(X)=b+NX$:

- *La aplicación lineal asociada es* $\hat{f}(X)=NX$
- *La aplicación f no es biyectiva si* $\det(N)=0$
- *Las aplicaciones afines no biyectivas transforman rectas en rectas o en puntos.* U*n subespacio afín se transforma en otro de dimensión igual o menor.*

NOTAS

# NOTAS

**CUADERNO**




Cuadernos.ijh@gmail.com
info@mairea-libros.com

